УДК 621.391; 629. 78

Решение навигационной задачи на основе моделей пространственных траекторий

С.В. Соколов

Южный федеральный университет (*г. Таганрог*)

Solution of Navigation Task Based on Spatial Trajectories Models

S.V. Sokolov

Southern Federal University, Taganrog

Рассматривается синтез аналитических пространственных моделей траекторий, дающих возможность минимизировать состав измерительного комплекса и вычислительные затраты при решении задач навигации. Применение этих моделей позволяет аппроксимировать с заданной точностью любую траекторию движения. Данные модели формируются на основе геодезических измерений или соответствующей картографической информации и инвариантны к характеру движения объекта и виду его физической модели.

Ключевые слова: навигация; пространственная модель траектории; высокоточное позиционирование; навигационная задача.

The synthesis of the analytical spatial patterns trajectories, allowing the minimization of the composition measurement system and of the computational cost for solving the navigation task, has been considered. It has been shown that these models are formed on the basis of geodesic measuring or the relevant cartographical information and are invariant to character of an object and the kind of its physical analog.

Keywords: navigation; dimensional model of the trajectory; precise positioning; navigation task.

Введение. Существующие навигационные алгоритмы формируются в основном или на основе дифференциальной модели объекта [1], или на основе так называемых уравнений ошибок навигационных систем [2, 3]. Оба случая предполагают априорную информацию об изменении траектории объекта во времени, что для подавляющего большинства подвижных объектов возможно лишь с весьма ограниченной точностью и на небольших интервалах времени. Последнее обстоятельство приводит, в свою очередь, к значительным ошибкам навигационных систем на длительном интервале движения. В то же время для навигации широкого класса объектов (транспорта железнодорожного, автомобильного, авиационного и пр.), движущихся по заранее известным с высокой точностью пространственным траекториям (железным дорогам, автострадам и пр.), возможно использование пространственных моделей пути, значительно упрощающих решение навигационной задачи и повышающих ее точность. Применение моделей позволяет аппроксимировать с заданной точностью любую траекторию движения, упрощая решение навигационной задачи на аппроксимируемых участках. При этом следует подчеркнуть, что модели формируются на основе геодезических измерений или соответствующей картографической информации и инвариантны к характеру движения объекта и виду его физической модели.

В этой связи теоретический и практический интерес представляет исследование возможностей синтеза и применения аналитических пространственных (трехмерных) моделей траекторий при решении навигационной задачи объекта с целью сокращения аппаратурного состава его измерительного комплекса и вычислительных затрат, а также повышения точности позиционирования объекта. В настоящее время в подавляющем большинстве практических приложений для аппроксимации (точнее, кусочной, или интервальной, аппроксимации) траекторий движения на сфере Земли используются две траектории – локсодромическая и ортодромическая [4]. Дальнейшее решение задачи пространственной навигации рассмотрим на примерах использования этих траекторий.

При последующем синтезе моделей траекторий используется их описание в географической системе координат (СК): ось OZ направлена к центру Земли, ось OY – по направлению местного меридиана, ось OX дополняет систему до правой [4].

Решение задачи навигации для локсодромической траектории. Основные уравнения навигации на сфере Земли, исходные для построения искомых пространственных моделей траекторий (ПМТ), как известно, имеют вид [3,4]:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_X}{\cos\varphi}(r+h)^{-1}, \quad \dot{\varphi} = V_Y(r+h)^{-1}, \quad \dot{h} = V_Z, \tag{1}$$

где λ – текущая долгота объекта; φ – текущая широта; h – высота; V_X, V_Y, V_Z – проекции скорости объекта на оси географической СК; r – радиус Земли.

Для решения задачи синтеза ПМТ на первом этапе предварительно примем допущение о постоянстве известного угла ориентации траектории движения относительно местного меридиана (азимутального угла) A в заданных пределах изменения географических координат на сфере Земли. На практике это допущение выполняется во многих случаях с высокой точностью и в достаточно существенных пределах изменения путевых координат.

В этом случае двумерная параметрическая модель пути – модель зависимости долготы от широты $\lambda = \lambda(\varphi)$ на участке постоянного азимутального угла A, называемая локсодромической, имеет вид [4]:

$$\lambda(\varphi) = \lambda_0 + \mathrm{tg}A \cdot \ln\left(\frac{\left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})\right|}{\left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4})\right|} \right) = \lambda_0 + \mathrm{tg}A \cdot \ln\left(P\left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\right), \tag{2}$$

где $P = \left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4})\right|^{-1} = \mathrm{const}$; λ_0 – начальное значение долготы участка пути с постоянным известным азимутальным углом A; φ_0 – начальное значение его широты.

При построении зависимости высоты объекта от географических координат используем второе допущение, также адекватное практике прокладки транспортных путей (железных дорог, автострад, траекторий полета и пр.): допущение об априорной известности и постоянстве (в заданных пределах изменения координат пути) угла наклона траектории ϑ относительно плоскости горизонта, т.е. в данном случае используем кусочно-линейную аппроксимацию изменения высоты траектории объекта.

Синтез аналитической параметрической модели зависимости высоты от изменения широты места при сделанных допущениях проведем, используя уравнения высоты и широты (1):

$$\dot{\varphi} = V_Y \left(r + h\right)^{-1}, \quad \dot{h} = V_Z .$$

Проекции линейной скорости V_Y, V_Z с учетом принятых допущений могут быть определены как

$$V_Z = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^{\,2}} \cdot \sin\vartheta, \quad V_Y = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^{\,2}} \cdot \cos\vartheta \cos A, \text{ где } A,\ \vartheta = \text{const}.$$

Тогда, разделив уравнение высоты на уравнение широты, имеем уравнение

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\sin\vartheta \left(r + h\right)}{\cos\vartheta \cos A},$$

в результате интегрирования которого получаем

$$\ln\left(\frac{(r+h)}{(r+h_0)}\right) = \operatorname{tg}\vartheta \sec A(\varphi - \varphi_0).$$

Откуда искомая аналитическая модель высоты в зависимости от изменения широты объекта имеет вид

$$h = h(\varphi) = (r + h_0) \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta \sec A(\varphi - \varphi_0)\right] - r, \tag{3}$$

где h – текущее изменение высоты; h_0, φ_0 – соответственно начальные значения высоты и широты на участке постоянных углов (азимутального угла A и угла наклона пути ϑ).

Полученные модели $\lambda = \lambda(\varphi)$, $h = h(\varphi)$ представляют собой уже параметрическую модель пути, позволяющую, во-первых, строить на ее основе различные более простые аппроксимации ПМТ для бортовых вычислителей средней мощности, во-вторых, резко сократить вычислительные затраты за счет возможности аналитического решения основных уравнений навигации и, в-третьих, сократить состав измерителей навигационной информации, так как определение только одного навигационного параметра – широты – решает навигационную задачу в целом. Определение широты, в свою очередь, может быть достигнуто различными известными методами – астрономическими, геодезическими и т.д. [1, 3–5]. Далее как вариант рассмотрим возможность ее определения на основе измерения модуля скорости объекта, что может быть реализовано с помощью уже существующих достаточно точных измерителей, в частности инерциальных [2, 3].

При подстановке выражения (3) в уравнение широты (1) имеем уравнение

$$\dot{\varphi} = V_Y \left((r + h_0) \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta \sec A(\varphi - \varphi_0)\right]\right)^{-1},$$

которое с учетом возможности представления проекции линейной скорости объекта на ось OY как

$$V_Y = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2} \cdot \cos A \cos\vartheta = |V| \cos A \cos\vartheta, \quad |V| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2},$$

принимает вид

$$\dot{\varphi} = |V| \cos A \cos\vartheta \left((r + h_0) \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta \sec A(\varphi - \varphi_0)\right]\right)^{-1}.$$

Данное уравнение легко интегрируется методом разделения переменных, что позволяет получить в явном виде временную аналитическую зависимость широты объекта от интеграла модуля его линейной скорости (т.е. пройденного пути S):

$$\varphi = \varphi_0 + \operatorname{ctg}\vartheta \cos A \ln\left(1 + \sin\vartheta (r + h_0)^{-1} \int_{t_0}^{t} |V| dt\right) = \varphi_0 + \operatorname{ctg}\vartheta \cos A \ln\left(1 + \sin\vartheta (r + h_0)^{-1} S\right).$$

Приведенное уравнение с учетом формул (2) и (3) позволяет легко найти (при сделанных допущениях об априорной известности и постоянстве азимутального угла A и угла наклона пути ϑ) аналитическое решение навигационной задачи при известной динамике изменения модуля скорости объекта. В данном случае для его позиционирования достаточно иметь измерения или модуля скорости, или пройденного пути, т.е. состав измерительного комплекса оказывается минимальным.

Решение навигационной задачи при движении по ортодромии. При неадекватности использования локсодромической модели зависимости долготы от широты ($A \neq \text{const}$) аналитическую модель изменения высоты в зависимости от широты можно построить следующим образом.

Пусть аналитическая двумерная параметрическая модель пути $\lambda(\varphi)$ задана известной функциональной зависимостью $\lambda(\varphi) = \Lambda(P, \varphi)$, где P – вектор известных постоянных параметров. Дифференцируя обе части данного соотношения по времени, имеем

$$\dot{\lambda}(\varphi) = \frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

Подставим в данное равенство выражения производных $\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$ из соответствующих уравнений системы (1). Тогда получим

$$V_X (\cos\varphi)^{-1} (r + h)^{-1} = \frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} V_Y (r + h)^{-1},$$

откуда имеем следующее уравнение связи проекций линейной скорости:

$$V_X = \frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} V_Y \cos\varphi.$$

Разделив уравнение высоты на уравнение широты, получим

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{V_Z (r + h)}{V_Y}.$$

Учитывая следующие выражения:

$$V_X = \frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} V_Y \cos\varphi, \quad \frac{V_Z}{V_Y} = \operatorname{tg}\vartheta \sqrt{\left(\frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} \cos\varphi\right)^2 + 1}$$

и

$$V_Z = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} \cdot \operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\left(\frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} V_Y \cos\varphi\right)^2 + V_Y^2} \cdot \operatorname{tg}\vartheta = V_Y \operatorname{tg}\vartheta \sqrt{\left(\frac{\partial \Lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi} \cos\varphi\right)^2 + 1},$$

получаем

$$\frac{dh}{d\varphi} = \operatorname{tg}\vartheta\,(r+h)\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)^2+1}\,.$$

Интегрируя данное уравнение, имеем

$$\int\limits_{h_0}^{h}\frac{dh}{(r+h)} = \operatorname{tg}\vartheta\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)^2+1}\,d\varphi,$$

откуда

$$h = \ (r+h_0)\ \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)^2+1}\,d\varphi\right]-r. \qquad (4)$$

Данная модель является самой общей зависимостью высоты пути от широты места в силу использования общей зависимости $\lambda(\varphi)=\Lambda(P,\varphi)$. Нетрудно заметить, что при допущении A=const полученная зависимость совпадает с моделью (3).

В качестве наиболее часто используемых функций $\Lambda(P,\varphi)$ рассмотрим ортодромическую (при движении по кратчайшему пути между точками на сфере с координатами $(\lambda_0,\varphi_0),(\lambda_1,\varphi_1)$), вытекающую из известного выражения широты произвольной точки на ортодромии [4, 5]:

$$\Lambda(P,\varphi) = \ \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi\sin(\lambda_1-\lambda_0)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_0+\operatorname{tg}^2\varphi_1-2\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}\varphi_1\cos(\lambda_1-\lambda_0)}}\right)-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi_0\sin\lambda_1-\operatorname{tg}\varphi_1\sin\lambda_0}{\operatorname{tg}\varphi_1\cos\lambda_0-\operatorname{tg}\varphi_0\cos\lambda_1} =$$

$$=\arcsin(P\operatorname{tg}\varphi)-P_0.$$

Получим для ортодромической модели явную аналитическую зависимость изменения высоты от текущей широты объекта. Из выражения (4) следует

$$\frac{\partial\Lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial[\arcsin(P\cdot\operatorname{tg}\varphi)-P_0]}{\partial\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-P^2\operatorname{tg}^2\varphi}}\cdot\frac{P}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi-P^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{P}{\cos\varphi}\,,$$

откуда, опуская промежуточные выкладки, имеем

$$h(\varphi) = \ (r+h_0)\ \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)^2+1}\ d\varphi\right]-r=$$

$$=(r+h_0)\ \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta(\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi\}-\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi_0\})\right]-r.$$

Рассмотрим возможность окончательного решения навигационной задачи, т.е. определения широты, на основе измерения только модуля скорости $|V|$ объекта.

Учитывая связь модуля скорости $|V|$ и проекции V_Y

$$|V|\cos\vartheta=\sqrt{V_X^2+V_Y^2}\ =V_Y\sqrt{\left(\frac{\partial\Lambda(P,\varphi)}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)^2+1}=V_Y\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{1+P^2}-\sin^2\varphi}}\,,$$

уравнение широты в случае ортодромии приводится к виду

$$\dot{\varphi}=\frac{|V|\cos\vartheta}{\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{\dfrac{1}{1+P^2}-\sin^2\varphi}}\cdot(r+h_0)\cdot\exp\left[\operatorname{tg}\vartheta\left(\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi\}-\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi_0\}\right)\right]}.$$

Проинтегрировав данное уравнение и проведя замену переменных, окончательно имеем

$$\exp\left[\operatorname{tg}\vartheta\cdot\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi\}\right]=\exp\left[\operatorname{tg}\vartheta\cdot\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi_0\}\right]\left[1+\frac{\sin\vartheta}{(r+h_0)}\int_{t_0}^{t}|V|dt\right].$$

Откуда искомое выражение для текущей широты имеет вид

$$\varphi=\arcsin\left\{(1+P^2)^{-1/2}\sin\left[\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi_0\}+\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}\ln\left(1+\frac{\sin\vartheta}{(r+h_0)}\int_{t_0}^{t}|V|dt\right)\right]\right\}.$$

Таким образом, для ПМТ, соответствующей случаю ортодромии и постоянному углу ϑ, аналитическое решение навигационной задачи при известной динамике изменения модуля скорости объекта описывается следующей системой равенств:

$$\lambda(\varphi)=\arcsin(P\operatorname{tg}\varphi)-P_0,$$

$$\varphi=\arcsin\left\{(1+P^2)^{-1/2}\sin\left[\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi_0\}+\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}\ln\left(1+\frac{\sin\vartheta}{(r+h_0)}\int_{t_0}^{t}|V|dt\right)\right]\right\},$$

$$h(\varphi)=(r+h_0)\ \exp\left[\operatorname{tg}\vartheta(\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi\}-\arcsin\{(1+P^2)^{1/2}\sin\varphi_0\})\right]-r.$$

При использовании допущения о постоянстве высоты h_0 на аппроксимируемом участке траектории, т.е. при кусочно-постоянной аппроксимации изменения высоты, выражение для широты значительно упрощается. Действительно, в этом случае связь модуля скорости $|V|$ и проекции V_Y упрощается

$$|V|=V_Y\cos\varphi\left[\sqrt{\frac{1}{1+P^2}-\sin^2\varphi}\right]^{-1}$$

и уравнение широты преобразуется к виду

$$\dot{\varphi}=\frac{|V|}{\cos\varphi\left[\sqrt{\dfrac{1}{1+P^2}-\sin^2\varphi}\right]^{-1}(r+h_0)},$$

после чего интегрируется разделением переменных

$$(r+h_0)\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\dfrac{1}{1+P^2}-\sin^2\varphi}}d\varphi=\int_{t_0}^{t}|V|dt,$$

где $$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{1+P^2}-\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \arcsin\{(1+P^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\} - \arcsin\{(1+P^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi_0\}.$$

Окончательно выражение для широты имеет вид

$$\varphi = \arcsin\{(1+P^2)^{-\frac{1}{2}}\sin[\frac{\int_{t_0}^{t}|V|dt}{(r+h_0)} + \arcsin\{(1+P^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi_0\}]\} = \arcsin\{a_0\sin[a_1\int_{t_0}^{t}|V|dt + a_2]\},$$

$$a_0 = (1+P^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad a_1 = (r+h_0)^{-1}, \quad a_2 = \arcsin\{(1+P^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi_0$$

и оказывается существенно проще, чем при кусочно-линейной аппроксимации изменения высоты.

Заключение. Помимо очевидной актуальности исследования теоретических аспектов синтеза пространственных моделей траекторий их практическая ценность состоит, во-первых, в существенном сокращении состава измерительного комплекса объекта, во-вторых, в возможности использования предложенных моделей как эталонных при построении различных аппроксимаций реальных пространственных траекторий, ориентированных на вычислительные мощности соответствующих бортовых компьютеров, и, в-третьих, в значительном повышении точности решения навигационной задачи объекта при высокоточном определении только одного параметра – широты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации проекта «Создание высокотехнологичного производства для изготовления комплексных реконфигурируемых систем высокоточного позиционирования объектов на основе спутниковых систем навигации, локальных сетей лазерных и СВЧ-маяков и МЭМС-технологии» по Постановлению Правительства РФ №218 от 09.04.2010 г.

Литература

1. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / ***Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова.*** – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.

2. ***Ярлыков М.С., Пригонюк Н.Д.*** Бортовая инерциально-спутниковая система для навигации и посадки самолетов // Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации: сб. статей и докладов. – СПб.: ГНЦ РФ; ЦНИИ «Электроприбор», 2001. – С. 83–99.

3. ***Анучин Н.О., Емельянцев Г.И.*** Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. – СПб.: ГНЦ РФ; ЦНИИ «Электроприбор», 1999. – 356 с.

4. ***Андреев В.Д.*** Теория инерциальной навигации. Автономные системы. – М.: Наука, 1966. – 580 с.

5. ***Ишлинский А.Ю.*** Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 672 с.

6. ***Градштейн И.С., Рыжик И.М.*** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Статья поступила
2 сентября 2014 г.

Соколов Сергей Викторович – доктор технических наук, профессор НТЦ «Техноцентр» ЮФУ (г. Таганрог). *Область научных интересов*: обработка оптических сигналов, оптические компьютеры, стохастическое оптимальное управление, фильтрация стохастических сигналов, идентификация, инерциальная навигация, интегрированные навигационные системы. **E-mail: s.v.s.888@yandex.ru**