УДК 517.926.7 DOI: 10.24151/1561-5405-2021-26-3-4-302-313

Исследование управляемости билинейных систем с ограниченным управлением

Л.Г. Гагарина, А.А. Доронина, Р.А. Фомин, Д.А. Чухляев

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Москва, Россия

doronina.anna.a@mail.ru

В прикладных задачах теории оптимального управления и автоматического регулирования возникает вопрос управляемости билинейных систем с ограниченным управлением. Задачи оптимального управления, как правило, решаются численными методами для нахождения экстремума функционала, для системы дифференциальных уравнений решается краевая задача. С математической точки зрения синтез оптимальных систем управления представляет собой задачу нелинейного программирования в функциональных пространствах. В работе исследованы задачи о вполне управляемости билинейной управляемой динамической системы (УДС) на плоскости. Рассмотрена управляемость УДС как с неограниченным, так и с ограниченным управлением. Определено несколько критериев вполне управляемости УДС с ограниченным управлением. Приведены доказательства теорем управляемости систем, имеющих замкнутую траекторию. Предложены условия вполне управляемости УДС с их алгебраическим обоснованием.

Ключевые слова: билинейные системы; ограничения; вполне управляемость; управляемая динамическая система

Для цитирования: Гагарина Л.Г., Доронина А.А., Фомин Р.А., Чухляев Д.А. Исследование управляемости билинейных систем с ограниченным управлением // Изв. вузов. Электроника. 2021. Т. 26. № 3-4. С. 302–313. DOI: https://doi.org/10.24151/1561-5405-2021-26-3-4-302-313

Study of Controllability of Bilinear Systems with Limited Control

L.G. Gagarina, A.A. Doronina, R.A. Fomin, D.A. Chukhlyaev

National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia

doronina.anna.a@mail.ru

Abstract: Optimal control is closely related to the choice of the most advantageous control modes for complex objects, which are described using ordinary differential systems. The problem of optimal control consists in calculating the optimal control program and synthesizing the optimal control system. This problem arises in the applied field of the optimal control theory, in the case when control is based on the principle of feedback and in automatic control systems. Optimal control problems, as a rule, are calculated by numerical methods to find the extremum of a functional or to solve a boundary value problem for a differential equation system. From a mathematical standpoint, the synthesis of optimal control systems is a nonlinear programming problem in functional spaces. In this study the problem of complete controllability of a bilinear control system on the plane was considered. The controllability of bilinear systems with both unlimited and limited control was studied. The evidences of closed trajectory systems controllability theorems were produced. The authors have defined multiple criteria of complete controllability for bilinear system with limited control. The complete controllability conditions of bilinear control system have been proposed with their algebraic reasoning. In the contemporary context of universal robotization of production, completely controllable systems matter in navigation, as well as in modeling of a number of economic and social processes.

Keywords: bilinear systems; constraints; complete controllability; controlled dynamical system

For citation: Gagarina L.G., Doronina A.A., Fomin R.A., Chukhlyaev D.A. Study of controllability of bilinear systems with limited control. *Proc. Univ. Electronics*, 2021, vol. 26, no. 3-4, pp. 302–313. DOI: https://doi.org/ 10.24151/1561-5405-2021-26-3-4-302-313

Введение. Оптимальное управление тесно связано с выбором наиболее выгодных режимов управления сложными объектами, которые описываются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Цель оптимального управления – расчет наилучшей программы управления и синтез самой системы оптимального управления.

Задачи о вполне управляемости билинейной управляемой системы на плоскости как с неограниченным, так и с ограниченным управлением возникают в прикладной области теории оптимального управления в случае, когда управление строится по принципу обратной связи, а также в системах автоматического регулирования. Решение данных задач актуально в условиях всеобщей роботизации производства, в области навигации, а также при моделировании экономических и социальных процессов.

Основные понятия. Динамическая система является управляемой (управляемая динамическая система, УДС), если описывается уравнением

$$\dot{x} = f\left(x, t, u\right), \qquad (1)$$

где x – вектор-столбец с координатами $x^1,..., x^n$ в n-мерном пространстве состояний УДС $\{x\}$; f – вектор-функция с координатами $f^1, ..., f^n$, заданная и определенная для любых значений своих аргументов [1; 2, с. 79–82].

Для того чтобы однозначно определить решение системы (1) (функции $x(t)$, $t_0 \le t$), необходимо задать начальный момент времени t_0 и начальное состояние системы – точку x_0, которая является состоянием системы в момент времени $t = t_0$:

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Необходимо также определить управление УДС, представляющее собой функцию $u(t)$, принимающую свои значения из множества U и определенную на отрезке времени $[t_0,t_1]$. Если управление $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, принадлежит определенному классу измеримых кусочно-непрерывных функций, определенных на том же отрезке времени $[t_0, t_1]$, то такое управление $u(t) \in A(t_0,t_1)$, $u \in U$ называется допустимым [3].

Предположим, что, как только заданы некоторое допустимое управление $u(t)$ и начальное условие (2), уравнение (1) имеет собственное и, по крайней мере, абсолютно непрерывное решение $x(t)$ на том же отрезке времени $t_0 \le t \le t_1$, удовлетворяющее начальному условию (2), т.е. почти всюду на $[t_0, t_1]$ существует единственное $\dot{x}(t)$.

Функцию $x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, которая является решением уравнения (1) при некотором допустимом управлении $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, назовем допустимым движением УДС, соответствующим управлению $u(t)$. Таким образом, по определению каждому допустимому движению $x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, соответствует, по крайней мере, одно допустимое управление $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, под действием которого получено движение $x(t)$.

Многообразие размерности $n-2$ на гиперповерхности траекторной воронки, которое разделяет локально участки этой поверхности с противоположно направленными штриховками, будем называть многообразием перемены штриховки на данной границе траекторной воронки.

Управляемость билинейных систем с неограниченным управлением. Пусть УДС представляет собой билинейную систему

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \{x\} = R^2, \tag{3}$$

где A и B – квадратные 2×2 матрицы с действительными элементами; u – скалярное управление.

Управление будет называться допустимым, если $u = u(t)$ – кусочно-непрерывная функция со значениями в R^1.

Пусть $M = R^2 \{0\}$. Система (3) управляема, если из произвольного начального состояния $x_0 \in M$ изображающая точка системы (3) может за конечное время $T > 0$ перейти под действием допустимого управления $u = u(t)$, $0 \le t \le T$, в произвольное (заданное) конечное состояние x_1 [4, с. 34–36].

Пусть $x \in M$, тогда вектор Bx задает угол наклона касательной, проходящей через данную точку *x*, к траектории уравнения

$$\dot{x} = Bx. \tag{4}$$

Траектория уравнения (2) в множестве *M* является границей траекторных воронок УДС (3). Под действием допустимого управления можно двигаться сколь угодно близко к этой траектории, причем в обе стороны. В пределе при $u \to \infty$ можно считать, что допустимое движение возможно в обоих направлениях вдоль траектории уравнения (4), т.е. в обе стороны вдоль границы воронки УДС (3). Направление вектора Ax определяет штриховку этой границы в точке x.

Исследование свойств управляемости проводится отдельно для всех возможных случаев комбинаций двух собственных значений матрицы *B*, которая имеет: два равных между собой действительных собственных числа; два различных действительных собственных числа; два чисто мнимых собственных числа; два сопряженных комплексных собственных числа с действительными частями, отличными от нуля. Рассмотрим последовательно все случаи (рисунок).

Матрица B имеет два равных между собой действительных собственных числа. Предполагая, что УДС (1) приведена к виду

$$\dot{y} = A_1 y + uB_1 y, \tag{5}$$

где $B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ – жорданова форма матрицы; λ – кратное действительное собственное число матрицы.

Для исследования управляемости данной УДС рассматривается семейство траекторий уравнения

$$\dot{y} = B_1 y, \tag{6}$$

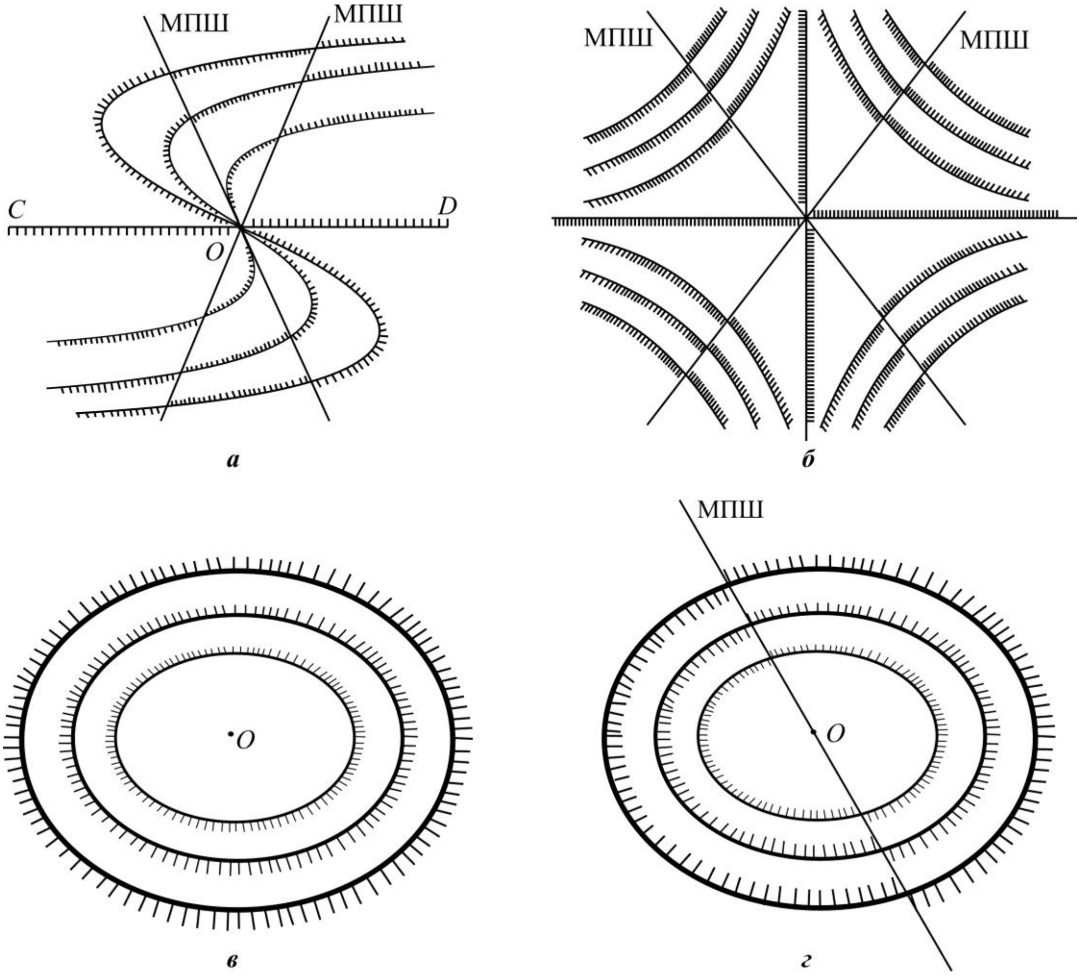
которые являются границами траекторных воронок УДС (5). Особая точка $y = 0$ уравнения (6) имеет вид узла. Можно показать, что для билинейной УДС (1) множествами перемены штриховки (МПШ) в множестве *M* могут быть только прямые линии, если они существуют, и притом не более двух.

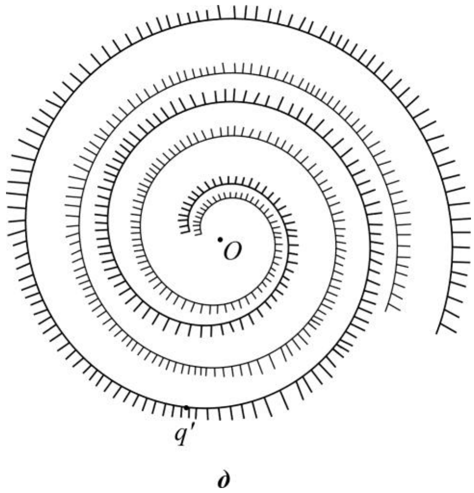
С любой траектории уравнения (5), проходящей в верхней полуплоскости, можно перейти на другую траекторию, также проходящую в верхней полуплоскости, так как каждая траектория имеет особую точку, в которой штриховка меняет направление. Это утверждение справедливо и для двух произвольных траекторий (границ воронок), лежащих в нижней полуплоскости. Поскольку на прямой *CD* (рисунок *а*), принадлежащей семейству траекторий, штриховка определена, возможны переходы как с верхней полуплоскости в нижнюю, так и наоборот. Поэтому УДС (5) управляема. Заметим, что если на прямой *CD* штриховка не определена, то УДС (5) неуправляема.

Матрица B имеет два различных действительных собственных числа. Заменой переменных $y = Nx$, где N – некоторая невырожденная матрица второго порядка, от УДС (1) переходим к УДС вида

$$\dot{y} = A_1 y + uB_1 y, \tag{7}$$

где $A_1 = NAN^{-1}$; $B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ – диагональная матрица; λ_1, λ_2 – различные действительные собственные числа матрицы.





Фазовый портрет системы, в которой матрица *B* имеет два равных между собой действительных собственных числа (*а*), два различных действительных собственных числа (*б*), два чисто мнимых собственных числа без линии перемены штриховки (*в*) и с одной линией перемены штриховки (*г*), два сопряженных комплексных собственных числа с действительными частями, отличными от нуля (*д*)

Phase portrait of a system where the matrix *B* has two real eigenvalues (*a*), two different real eigenvalues (*b*), two purely imaginary eigenvalues without the line of change of shading (*c*) and with one line of change of shading (*d*), two conjugate complex eigenvalues with a nonzero real part (*e*)

Управляемость УДС (7) исследована в работах [5, с. 118–126; 6], где доказано, что УДС (7) управляема тогда и только тогда, когда элементы матрицы A_1 удовлетворяют условию

$$a_{12}\ a_{21} < 0 . \tag{8}$$

Условие (8) можно получить с помощью метода фазового портрета. В случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$ семейство траекторий уравнения (4) имеет особую точку типа седла. Так как каждая траектория из этого семейства делит R^2 на две несвязные области, то для управляемости УДС (7) необходимо, чтобы на каждой такой траектории существовала точка, в которой штриховка траектории меняет направление. Это означает, что УДС (7) должна иметь две различные прямые линии перемены штриховки: $y^2 = k_1 y^1$ и $y^2 = k_2 y^1$ такие, что

$$k_1 k_2 < 0. \tag{9}$$

Уравнение линий перемены штриховки УДС (7) имеет вид

$$\lambda_2 a_{12}\left(y^2\right)^2 + \left(\lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{22}\right) y^1 y^2 - \lambda_1 a_{21}\left(y^1\right)^2 = 0.$$

Так как приведенное уравнение не содержит членов, линейных по y^1, y^2, то линией перемены штриховки могут быть либо две различные прямые, проходящие через начало координат, либо одна такая прямая. Для выполнения условия (9) по теореме Виета необходимо, чтобы $a_{12}a_{21} < 0$. Если УДС (7) имеет две прямые линии перемены штриховки, то она имеет вид с точностью до направления штриховки (рисунок *б*). Видно, что УДС (7) полностью управляема [7].

Таким образом, если матрица *B* имеет два неравных между собой действительных собственных числа, то система (3) управляема тогда и только тогда, когда

$$\det\left[A, B\right] < 0. \tag{10}$$

Матрица B имеет два чисто мнимых собственных числа. В этом случае особая точка системы (4) имеет вид центра. Если у системы (3) нет линии перемены штриховки, то ее фазовый портрет имеет вид, представленный на рисунке *в*. Видно, что УДС неуправляема, так как, например, из окрестности особой точки нельзя попасть во все остальные точки пространства. Если у системы (3) существует хотя бы одна линия перемены штриховки, то с учетом свойства симметрии штриховки портрет имеет вид (с точностью до направления штриховки), показанный на рисунке *г*.

Система, имеющая хотя бы одну линию (прямую) перемены штриховки, полностью управляема, поскольку из любой точки множества *M* возможны управляемые переходы как в области, прилегающие к особой точке, так и в точки R^2, удаленные на любое расстояние от начала координат. Поэтому для рассматриваемых матриц *B* необходимое и достаточное условие управляемости – существование хотя бы одной линии перемены штриховки. Получим это условие в аналитическом виде. У билинейной системы уравнение прямых перемены штриховки имеет вид

$$\left|Ax \quad Bx\right| = 0. \tag{11}$$

Раскрывая выражение (11) и используя тот факт, что матрица *B* имеет чисто мнимые собственные числа, т.е. след матрицы $\operatorname{tr} B = 0$, получим необходимые и достаточные условия управляемости:

$$\det\left[A, B\right] + \left[\operatorname{tr} A\right]^2 \det B < 0. \tag{12}$$

Так как собственные числа матрицы B чисто мнимые, то $\det B > 0$. Поэтому необходимым условием управляемости является соотношение

$$\det[A, B] < 0. \tag{13}$$

Матрица B имеет два сопряженных комплексных собственных числа с действительными частями, отличными от нуля. В этом случае особая точка уравнения (4) имеет вид фокуса. Доказано, что если хотя бы в одной точке пространства штриховка определена, то система (3) управляема [2, 8].

Действительно, пусть штриховка определена в некоторой точке $x' \neq 0$. Из свойства симметрии штриховок следует, что в этом случае штриховка определена и во всех точках прямой, проходящей через точки q' и O (рисунок *д*). Следовательно, выходя из произвольной точки x_0 (она не изображена на рисунке *д*), можно по траектории уравнения (4) добраться до пересечения с прямой Ox_0. Так как в этой точке пересечения штриховка определена, то совершим согласно штриховке управляемый переход на спираль, проходящую через конечную точку x_1. Таким образом, для управляемости (3) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке пространства была определена штриховка. Это условие управляемости эквивалентно условию

$$B \neq kA \tag{14}$$

для любого действительного числа.

Из соотношений (10), (12)–(14) вытекает необходимое и достаточное условие управляемости УДС (3):

- $\det[A, B] < 0$, если матрица B имеет действительные собственные числа и $B \neq kA$ при любом действительном числе k, где E – единичная матрица;

- $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A < 0$, если $B = kA$ при некотором действительном числе k;

- $\det[A, B] + [\operatorname{tr} A]^2 \det B < 0$, если матрица B имеет чисто мнимые собственные числа;

- $B \neq kA$ для любого действительного числа k, если B имеют комплексные собственные числа с действительной частью, не равной нулю.

Из проведенного анализа вытекает еще одно следствие: если $\det[A, B] > 0,$ то УДС (3) неуправляема.

Управляемость билинейной системы с ограниченным управлением. Исследована управляемость системы при ограниченном управлении. Пусть

$$\dot{x} = Ax + uBx, \qquad \alpha \le u \le \beta. \tag{15}$$

Без ограничения общности полагаем, что $u \in [-1, 1]$. Тогда достаточно рассматривать управление, принимаемое значения $u = -1$ и $u = 1$. Таким образом, возможен переход по траекториям систем [8, 9]. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для вполне управляемости необходимо и достаточно, чтобы существовала замкнутая периодическая траектория системы, окружающая начало координат, на которой штриховка меняет направление.

Доказательство. Пусть система (15) вполне управляема в $R^2 \setminus \{0\}$. Тогда для любого x_0 существует такое время τ и такое управление $\tilde{u}$, которое переводит точку x_0 в симметричную ей точку $-x_0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = (A + uB)x,$$

где $A + uB = \begin{pmatrix} a_1 + ub_1 & a_2 + ub_2 \\ a_3 + ub_3 & a_4 + ub_4 \end{pmatrix}$, $\dot{x}$, x – векторы.

Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a_1 + ub_1) + x_2(a_2 + ub_2), \\ \dot{x}_2 = x_1(a_3 + ub_3) + x_2(a_4 + ub_4) \end{cases}$$

с условиями $x(0) = x_0$, $x(\tau) = -x_0$.

Управление u переводит x_0 в $-x_0$, тогда в силу симметрии u переводит также $-x_0$ в x_0. Следовательно, существует замкнутая периодическая траектория системы [9–11].

Теорема 2. Система (15) вполне управляема в $R^2 \setminus \{0\}$, если существует такое управление $u^* \in [\alpha, \beta]$, что $p(u^*) = \mathrm{tr}(A + u^*B) = 0$, $q(u^*) = \det(A + u^*B) > 0$ и дискриминант уравнения $\det(Ax, Bx) = 0$ строго больше нуля, т.е. $N^2 - 4MK > 0$.

Доказательство. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad A + uB = \begin{pmatrix} a_1 + ub_1 & a_2 + ub_2 \\ a_3 + ub_3 & a_4 + ub_4 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\chi(\lambda(u)) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A + uB)\lambda = \det(A + uB).$$

Пусть $p(u) = \mathrm{tr}(A + uB)$, $q(u) = \det(A + uB)$, тогда

$$\lambda_i = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Если существует управление, то собственные числа системы (15) чисто мнимые. Достаточными условиями будут $p = 0,\ q > 0.$ Следовательно,

$$\mathrm{tr}(A + uB) = a_1 + a_4 + u(b_1 + b_4) = 0.$$

Если $b_1 + b_4 \neq 0$, то существует управление

$$u^* = -\frac{a_1 + a_4}{b_1 + b_4} = -\frac{\mathrm{tr}A}{\mathrm{tr}B},$$

при этом

$$\det(A + u^*B) = \left(\frac{\mathrm{tr}A}{\mathrm{tr}B}\right)^2 \det B - \frac{\mathrm{tr}A}{\mathrm{tr}B}\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) + \det A > 0.$$

Если у системы (15) нет линии перемены штриховки, то УДС неуправляема, так как, например, из окрестности особой точки нельзя попасть во все остальные точки пространства. Определим МПШ уравнением $\det(Ax, Bx) = 0.$

Получаем

$$\begin{vmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 & b_1x_1 + b_2x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_2 & b_3x_1 + b_4x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_1^2(a_1b_3 - a_3b_1) + x_1x_2(a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1) + x_2^2(a_2b_4 - a_4b_2) = 0.$$

Обозначим $M = a_1b_3 - a_3b_1$, $N = a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1$, $K = a_2b_4 - a_4b_2$. Следовательно,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MK}}{2M}.$$

Для существования линии перемены штриховки необходимо, чтобы $N^2 - 4MK > 0.$

Итак, система (1) является вполне управляемой, если $p = 0$, $q > 0$ и $N^2 - 4MK > 0.$

Теорема 3. Для любого управления $u^* \in [\alpha, \beta]$ такого, что $\mathrm{tr}(A + u^*B) \neq 0$ и $\det(A + u^*B) > 0$, система (15) не является вполне управляемой в $R^2 \setminus \{0\}$.

Доказательство. Даны матрицы (2). Характеристическое уравнение системы (1) имеет вид (3). По условию теоремы

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A + u^*B) \neq 0,$$
$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A + u^*B) > 0.$$

Следовательно, оба собственных значения системы (1) будут либо положительными (отрицательными) действительными числами, либо комплексными с положительной (отрицательной) действительной частью:

$$\mathrm{Re}\lambda_i(u) > 0, \quad \mathrm{Re}\lambda_i(u) < 0.$$

Рассмотрим скалярное произведение $v = (x, \dot{x}) = x^T \dot{x}$. Матрица $(A + uB)$ знакоопределенная в силу уравнения (5), следовательно производная $\dot{v}$, согласно системе (1), имеет вид

$$\dot{v} = 2x^T \dot{x} = 2x^T (A + uB) x \geq 0.$$

Если $\mathrm{tr}(A + uB) \geq 0$, то все решения удаляются от начала координат и образуется «белая дыра». Если $\mathrm{tr}(A + uB) \leq 0$, то и $\dot{v} \leq 0$ для любых $u \in [\alpha, \beta]$. Тогда все решения будут только приближаться к началу координат. В связи с этим система (14) не является вполне управляемой.

Без ограничения общности полагаем, что $u \in [-1,1]$. Тогда в силу принципа максимума Понтрягина [3] достаточно рассматривать управление $u \in \{-1\ ,1\}$, т.е. управление $\tilde{u}(t)$, принимаемое значения $u=-1$ и $u=1$:

$$\dot{x}=(A+Bu)x=Ax+Bxu, \qquad |u|\le 1.$$

Таким образом, если возможен переход из x_1 в x_2 (исходя из теоремы 1) и существует кусочно-постоянное оптимальное управление $u^*(t)\in\{-1,1\}$, т.е. возможен переход по траекториям систем

$$\dot{x}=(A+Bu)x \quad (+), \qquad \dot{x}=(A-Bu)x \quad (-).$$

В случае когда фазовый портрет системы имеет вид центра, система всегда будет управляемой при наличии хотя бы одной МПШ, так как из любой точки возможны управляемые переходы на любое расстояние. В связи с этим справедлива теорема 1.

Теорема 4. Для того чтобы система была вполне управляема в $R^2 \setminus \{0\}$, достаточно, чтобы $\exists u^* \in [\alpha,\beta] : \lambda(A+Bu^*)=\pm i\beta$ и $S(x)=\det(Ax,Bx)$ не была знакоопределенной.

Доказательство. Согласно фазовому портрету особой точки типа центра на рисунке *в*, система, имеющая хотя бы одну линию (прямую) перемены штриховки, полностью управляема, поскольку из любой точки возможны управляемые переходы.

Заключение. В ходе проведенного исследования определено несколько критериев вполне управляемости УДС с ограниченным управлением.

Приведенные доказательства теорем вполне управляемости систем, имеющих замкнутую траекторию, и предложенные условия вполне управляемости УДС с их алгебраическим обоснованием актуальны при решении прикладных задач теории оптимального управления и задач автоматического регулирования.

Литература

1. Исследование управляемости билинейных систем на плоскости с неограниченным управлением / ***Л.Г. Гагарина, Ю.В. Мастерков, А.А. Доронина и др.*** // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. № 21. С. 94–101.

2. ***Бутковский А.Г.*** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 476 с.

3. ***Коган Е.А.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2020. 293 с.

4. ***Бутковский А.Г.*** Методы управления системами с распределенными параметрами: монография. М.: Наука, 1975. 568 с.: ил.

5. ***Бутковский А.Г.*** Фазовые портреты управляемых динамических систем: монография. М.: Наука, 1985. 136 с.

6. ***Зубова С.П., Раецкая Е.В.*** Решение одной задачи управления для динамической системы в частных производных // Информационные технологии в науке, образовании и производстве (ИТНОП-2020): сб. материалов VIII Междунар. науч.-техн. конф. Белгород: Белгородский государственный национальный исследовательский университет, 2020. С. 456–460.

7. ***Доронина А.А., Фомин Р.А., Чухляев Д.А.*** Особенности разработки метода статического выявления определяющих параметров // Микроэлектроника и информатика – 2020. 27-я Всероссийская межвузовская науч.-техн. конф. студентов и аспирантов (Зеленоград, 1–9 октября 2020 г.): тез. докл. М.: МИЭТ, 2020. С. 119.

8. ***Мастерков Ю.В.*** О локальной управляемости нелинейных систем в критическом случае // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2006. № 3 (37). С. 97–98.

9. ***Мастерков Ю.В., Родина Л.И.*** Условия локальной управляемости систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 81–94.

10. ***Юрина Т.А.*** Оптимальное управление: учеб. пособие. Омск: СибАДИ, 2020. 71 с.

11. ***Царькова Е.Г.*** Оптимальное управление и моделирование систем: монография. Пенза: Наука и просвещение, 2019. 126 с.

Поступила в редакцию 13.09.2020 г.; после доработки 13.09.2020 г.; принята к публикации 14.04.2021 г.

Гагарина Лариса Геннадьевна – доктор технических наук, профессор, директор Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, г. Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, 1), gagar@bk.ru

Доронина Анна Александровна – магистрант Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, г. Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, 1), doronina.anna.a@mail.ru

Фомин Роман Андреевич – магистрант Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, г. Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, 1), roman.a.fomin@mail.ru

Чухляев Дмитрий Алексеевич – магистрант Института системной и программной инженерии и информационных технологий Национального исследовательского университета «МИЭТ» (Россия, 124498, г. Москва, г. Зеленоград, пл. Шокина, 1), chukhlyaev.dmitry@mail.ru

References

1. Gagarina L.G., Masterkov Yu.V., Doronina A.A., Fomin R.A., Chukhlyaev D.A. Study of controllability of bilinear systems with unlimited control. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya,* 2020, no. 21, p. 94–101. (In Russian).

2. Butkovskiy A.G. *Theory of Optimal Control of Systems with Distributed Parameters.* Moscow, Nauka Publ., 1965. 476 p. (In Russian).

3. Kogan E.A. *Ordinary Differential Equations and Calculus of Variations.* Moscow, INFRA-M Publ., 2020. 293 p. (In Russian).

4. Butkovskiy A.G. *Methods of Control of Systems with Distributed Parameters*, monograph. Moscow, Nauka Publ., 1975. 568 p. (In Russian).

5. Butkovskiy A.G. *Phase Portraits of Controlled Dynamical Systems*, monograph. Moscow, Nauka Publ., 1985. 136 p. (In Russian).

6. Zubova S.P., Raetskaya E.V. Solution of the control problem for a dynamic system in partial derivatives. *Information Technologies in Science, Education and Production (ITNOP-2020), Proceedings of the 8th International Scientific and Technical Conference.* Belgorod, Belgorod State University, 2020, pp. 456–460. (In Russian).

7. Doronina A.A., Fomin R.A., Chukhlyaev D.A. Features of the development of a method for static identification of defining parameters. *Microelectronics and Informatics – 2020. 27th All-Russian Interuniversity Scientific and Technical Conference of Students and Postgraduates (Zelenograd, 1–9 October 2020), Book of Abstracts.* Moscow, MIET, 2020, p. 119. (In Russian).

8. Masterkov Ju.V. On the local controllability of nonlinear systems in the critical case. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University*, 2006, no. 3 (37), pp. 97–98. (In Russian).

9. Masterkov Ju.V., Rodina L.I. The conditions of local controllability for linear systems with stochastic parameters. *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics*, 2006, no. 1, pp. 81–94. (In Russian).

10. Yurina T.A. *Optimal Control.* Omsk, SibADI Publ., 2020. 71 p. (In Russian).

11. Tsar'kova E.G. *Optimal Control and Modeling of Systems.* Penza, Nauka i prosveshcheniye Publ., 2019. 126 p. (In Russian).

Received 13.09.2020; Revised 13.09.2020; Accepted 14.04.2021.

Information about the authors:

Larisa G. Gagarina – Dr. Sci. (Eng.), Professor, Director of the Institute of System and Software Engineering and Information Technology, National Research University of Electronic Technology (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokin sq., 1), gagar@bk.ru

Anna A. Doronina – Master's student of the Institute of System and Software Engineering and Information Technology, National Research University of Electronic Technology (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokin sq., 1), doronina.anna.a@mail.ru

Roman A. Fomin – Master's student of the Institute of System and Software Engineering and Information Technology, National Research University of Electronic Technology (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokin sq., 1), roman.a.fomin@mail.ru

Dmitry A. Chukhlyaev – Master's student of the Institute of System and Software Engineering and Information Technology, National Research University of Electronic Technology (Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, Shokin sq., 1), chukhlyaev.dmitry@mail.ru